ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ LAN ANH

VỀ CHUẨN LÔGARIT CỦA MA TRẬN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, tháng 5/2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ LAN ANH

VỀ CHUẨN LÔGARIT CỦA MA TRẬN

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

TS. NGUYỄN THANH SƠN

Thái Nguyên, tháng 5/2018

Mục lục

Bảng ký hiệu

$\|x\|_p$	chuẩn p
$\|x\|_\infty$	chuẩn vô cùng
$\|A\|_P$	chuẩn ma trận A trên P
$\|A, B\|_V$	chuẩn của cặp ma trận A, B trên V
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	tích vô hướng
$\| \cdot \|_{\widehat{m}}$	chuẩn véc tơ trên $\mathbb{R}^m$
$Q^\top$	ma trận chuyển vị của ma trận Q
$\mu(A)$	chuẩn lôgarit của ma trận A
$\mu_P(A)$	chuẩn lôgarit của PAP^{-1}
$\mathbb{R}^{n \times n}$	không gian các ma trận vuông cỡ $n \times n$
$\exp$	hàm lũy thừa cơ số e
$B(x^*; r)$	hình cầu mở tâm x^*, bán kính r
$\sigma(A, B)$	tập phổ của cặp ma trận
$\rho(A, B)$	bán kính phổ của cặp ma trận
diag	ma trận đường chéo
I_r	ma trận đơn vị cỡ $r \times r$
D_+	đạo hàm bên phải
$\widehat{A}^D$	ma trận nghịch đảo Drazin của $\widehat{A}$

Mở đầu

Khi nghiên cứu định lượng những phương trình vi phân tuyến tính và phương trình vi phân đại số, người ta quan tâm đến tính bị chặn của nghiệm của chúng. Rõ ràng, đại lượng này liên quan đến một độ đo nào đó của ma trận hệ số. Thông thường, việc đó làm ta liên tưởng đến một chuẩn của ma trận. Song chuẩn của ma trận là đại lượng không âm nên không cho ta những ước lượng chặt cho tính bị chặn của nghiệm. Việc giới thiệu và sử dụng khái niệm chuẩn lôgarit của ma trận sẽ giúp ta khắc phục điều đó. Không những vậy, nó còn được sử dụng trong nhiều đánh giá tính và phân tích tính hội tụ của một số phương pháp số giải phương trình vi phân.

Mặc dù có tầm quan trọng như vậy, nhưng chuẩn lôgarit không được giới thiệu trong chương trình đại học và cao học. Chính vì lẽ đó, chúng tôi đã chọn đề tài "Về chuẩn lôgarit của ma trận" để làm luận văn thạc sĩ. Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương.

Chương 1. Chuẩn lôgarit của ma trận

Trước tiên, chúng tôi nhắc lại khái niệm chuẩn thông thường của ma trận. Sau đó, chúng tôi trình bày chi tiết định nghĩa và nhiều tính chất phong phú của nó. Cuối cùng, Chương I được kết thúc bằng một số ứng dụng của chuẩn lôgarit của ma trận.

Chương 2. Chuẩn lôgarit của cặp ma trận

Chương này, chúng tôi trình bày khái niệm chuẩn lôgarit cho cặp ma trận (A, B) và các tính chất của chuẩn lôgarit của cặp ma trận. Khái niệm này còn được mở rộng cho cặp toán tử tuyến tính vô hạn chiều. Cuối cùng, chúng tôi nghiên cứu sự tăng của nghiệm của hệ vi phân đại số có hệ số thay đổi.

Luận văn kết thúc với phần kết luận và tài liệu tham khảo.

Mặc dù đã rất nghiêm túc và cố gắng thực hiện luận văn này, nhưng luận văn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết nhất định. Kính mong sự góp ý của các thầy cô để luận văn này được hoàn chỉnh và ý nghĩa hơn.

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Thanh Sơn. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn tận tình và đầy trách nhiệm để tác giả hoàn thành luận văn này.

Tác giả đã học tập được rất nhiều kiến thức chuyên ngành bổ ích cho công tác và nghiên cứu của bản thân. Nhân dịp này tác giả xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới các Thầy giáo, Cô giáo đã tham gia giảng dạy lớp Cao học Toán K10A; Nhà trường và các phòng chức năng của Trường, Khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Cuối cùng tác giả xin cảm ơn gia đình, bạn bè và đồng nghiệp đã động viên, ủng hộ và tạo mọi điều kiện cho tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu và học tập.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2018

Tác giả luận văn

Nguyễn Thị Lan Anh

Chương 1

Chuẩn lôgarit của ma trận

Chương này sẽ trình bày khái niệm, phát biểu và chứng minh các tính chất cùng một số ứng dụng của chuẩn lôgarit. Nội dung chính của chương này được tham khảo chủ yếu từ tài liệu [2–4, 7, 8]. Đáng chú ý, chúng tôi tự chứng minh rất nhiều tính chất mà các tài liệu chỉ liệt kê.

1.1 Chuẩn của ma trận

Trong mục này, chúng tôi sẽ trình bày khái niệm chuẩn của ma trận. Trước tiên, chúng tôi sẽ nhắc lại khái niệm chuẩn trong không gian tuyến tính. Đây là những kiến thức đã được học trong chương trình giải tích hàm. Song khi trình bày ở đây, chúng tôi chọn nhấn mạnh đến khía cạnh tính toán nên trình bày nó trong không gian hữu hạn chiều. Khái niệm chuẩn của ma trận sau đó được trình bày dựa trên hai cách: chuẩn của toán tử tuyến tính trong không gian hữu hạn chiều hoặc chuẩn của véc tơ. Để đảm bảo tính ngắn gọn, chứng minh cho các phát biểu được lược đi. Người đọc có thể tìm hiểu trong tài liệu được chúng tôi tham khảo [3].

1.1.1 Chuẩn của véc tơ

Chuẩn được sử dụng để tính toán các sai số trong phép tính ma trận, bởi vậy chúng ta cần hiểu làm thế nào để tính toán và vận dụng chúng.

Định nghĩa 1.1.1. *Chuẩn* trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ là một hàm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, thỏa mãn tất cả những tính chất sau đây:

1) $\|x\| \geq 0$, và $\|x\| = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$;

2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ với bất kỳ vô hướng α;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ví dụ 1.1.2. Các chuẩn phổ biến là $\|x\|_p = \left(\sum_i |x_i^p|\right)^{1/p}$ với $1 \leq p < \infty$ mà ta hay gọi là các *chuẩn* p, chuẩn $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$, mà ta gọi là *chuẩn* ∞ hay *chuẩn vô cực*.

Ta có thể chứng minh dễ dàng rằng, nếu $\|x\|$ là chuẩn bất kỳ và C là ma trận không suy biến bất kỳ, thì $\|Cx\|$ cũng là một chuẩn.

Bây giờ ta định nghĩa các tích vô hướng, khái quát hóa của tích vô hướng tiêu chuẩn $\sum_i x_i y_i$ và phát sinh thường xuyên trong đại số tuyến tính.

Định nghĩa 1.1.3. Cho $\mathbb{R}^n$ là không gian tuyến tính thực. Hàm số $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ được gọi là một *tích vô hướng* nếu các tính chất sau được thỏa mãn:

1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;

2) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$;

3) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ với bất kỳ vô hướng α thực;

4) $\langle x, x \rangle \geq 0$, và $\langle x, x \rangle = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.

Ví dụ 1.1.4. Trên $\mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle = y^\top x = \sum_i x_i y_i$ là tích vô hướng.

Định nghĩa 1.1.5. x và y là *trực giao* nếu $\langle x, y \rangle = 0$.

Một tính chất quan trọng của một tích vô hướng là nó thỏa mãn bất đẳng thức Cauchy-Schwartz. Điều này dẫn đến việc ta có thể chứng minh $\sqrt{\langle x, x \rangle}$ là một chuẩn.

Bổ đề 1.1.6. *Bất đẳng thức Cauchy-Schwartz.* $|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}$.

Bổ đề 1.1.7. $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ *là một chuẩn.*

Có một tương ứng $1-1$ giữa các tích vô hướng và những ma trận đối xứng xác định dương được định nghĩa dưới đây. Những ma trận này xuất hiện thường xuyên trong ứng dụng.

Định nghĩa 1.1.8. Một ma trận thực đối xứng A là *xác định dương* nếu $x^\top Ax > 0$ với mọi $x \neq 0$. Ta viết tắt đối xứng xác định dương là s.p.d.

Bổ đề 1.1.9. *Cho* $\mathfrak{B} = \mathbb{R}^n$ *và* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *là một tích vô hướng. Thì có một ma trận* A *s.p.d cỡ* $n \times n$ *mà* $\langle x, y\rangle = y^\top Ax$*. Ngược lại, nếu* A *là s.p.d thì* $y^\top Ax$ *là một tích vô hướng.*

Hai bổ đề dưới đây cho phép so sánh các chuẩn khác nhau trên cùng một không gian hữu hạn chiều.

Bổ đề 1.1.10. *Cho* $\|\cdot\|_\alpha$ *và* $\|\cdot\|_\beta$ *là hai chuẩn trên* $\mathbb{R}^n$*. Có các hằng số* $C_1, C_2 > 0$ *mà, với mọi* x, $C_1\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq C_2\|x\|_\alpha$*. Ta cũng có thể nói rằng các chuẩn* $\|\cdot\|_\alpha$ *và* $\|\cdot\|_\beta$ *là tương đương với các hằng số* C_1, C_2.

Bổ đề 1.1.11.

$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2,$

$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty,$

$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$

1.1.2 Chuẩn của ma trận

Định nghĩa 1.1.12. $\|.\|$ là một *chuẩn ma trận* trên ma trận cỡ $m \times n$ nếu nó là một ma trận vectơ trên không gian $m.n$ chiều:

1) $\|A\| \geq 0$, và $\|A\| = 0$ khi và chỉ khi $A = 0$;